

Entraînement au calcul :

1. DÉVELOPPER

$$\begin{aligned}(1) \quad & A_2 = (a-b)(a+b) \\ & \Rightarrow A_2 = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2 \\(2) \quad & A_3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\(3) \quad & A_4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\(4) \quad & B_2 = (a+b)^2 \\ & \Rightarrow B_2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\(5) \quad & B_3 = (a+b)^3 \\(6) \quad & B_4 = (a+b)^4\end{aligned}$$

Dans l'expression $(a^2 + ab + b^2)$, pour démontrer qu'elle est toujours > 0 , remplacer a par $(u+v)$ et b par $(u-v)$ (et simplifier) : on obtient une somme de carrés.

Exprimer u et v en fonction de a et b (pour démontrer que $\forall(a,b), \exists(u,v)$).

$$\begin{aligned}a^2 + ab + b^2 &= (u+v)^2 + (u+v)(u-v) + (u-v)^2 \\ a^2 + ab + b^2 &= u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - v^2 + u^2 - 2uv + v^2 \\ a^2 + ab + b^2 &= 3u^2 + v^2 > 0\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a &= & u+v \\ b &= & u-v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+b &= & 2u \\ a-b &= & 2v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u = \frac{a+b}{2} \\ v = \frac{a-b}{2} \end{bmatrix}$$

Comme on ne divise pas par a ou b , u et v sont toujours définis $\forall(a,b)$.

Remarque : Pour démontrer que $(a^2 + ab + b^2) > 0$, on pouvait remarquer que seul ab peut être < 0 et qu'il est toujours inférieur en valeur absolue au plus grand de a^2 et b^2 (mais l'exercice consistait à faire du calcul).

Si, dans l'expression $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ on remplace a par $(u+v)$ et b par $(u-v)$, on obtient : $4u(u^2 + v^2)$ du signe de u (milieu de (a,b)).

2. FRACTIONS

Electricité : calcul de la résistance r_{eq} équivalente à 2 résistances r_1 et r_2 montées en parallèle.

$$(7) \quad \frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

$$r_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$$

Pour ne pas changer la fraction, je multiplie **le numérateur et le dénominateur** ("en haut et en bas") par la même quantité $r_1 r_2$:

$$r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{\frac{r_1 r_2}{r_1} + \frac{r_1 r_2}{r_2}}$$

$$r_{eq} = \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1}$$

Remarque : il valait mieux commencer par réduire au même dénominateur le membre de droite de l'équation (7), ce qui permettait d'arriver directement au résultat, (mais c'était pour s'entraîner au calcul sur les fractions).

Même problème avec 3 résistances r_1, r_2, r_3 montées en parallèle.

$$(8) \quad \frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

$$r_{eq} = ?$$

3. RÉSOUDRE L'ÉQUATION

$$(9) \quad \frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2}{x-3}$$

D'abord, on remarque que la variable x doit être différente de 2 et de 3 afin que les dénominateurs $(x-2)$ et $(x-3)$ soient $\neq 0$.

$$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = 0$$

Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \left(\frac{x+3}{x-2} - \frac{x-2}{x-3}\right)$ est $\mathbb{R} - \{2, 3\}$

Réduction au même dénominateur $(x-2)(x-3)$ des 2 fractions à additionner, ce qui revient au même et permet de gagner une étape :

On multiplie **les 2 membres** de l'équation par $(x-2)(x-3)$

$$\left(\frac{x+3}{x-2} \times (x-2)(x-3)\right) - \left(\frac{x-2}{x-3} \times (x-2)(x-3)\right) = 0 \times (x-2)(x-3)$$

$$[(x+3)(x-3)] - [(x-2)(x-2)] = 0$$

$$[x^2 - 9] - [x^2 - 4x + 4] = 0$$

$$x^2 - 9 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$4x - 13 = 0$$

$$x = \frac{13}{4}$$

Cette solution est acceptable car $x \neq 2$ et $x \neq 3$ ou dit autrement : $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$

Résoudre l'équation : Un satellite est sur une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre de masse M . Il se déplace à la vitesse v . La constante de gravitation est G .

Exprimer la variable r en fonction de la variable v

Dans le repère stellaire lié à la Terre : Le satellite est soumis à la force de gravitation $\frac{GMm}{r^2}$ et il subit l'accélération circulaire : $\gamma = \frac{v^2}{r}$ d'où $F = m\gamma$ s'écrit :

$$(10) \quad \frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Réduction au même dénominateur des 2 membres :

Multiplions les 2 membres par r^2

$$\frac{GMm}{r^2} \times r^2 = m \frac{v^2}{r} \times r^2 \implies GMm = mv^2r$$

$$r = \frac{GMm}{mv^2} = \frac{GM}{v^2}$$

ou :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Remarque : Dans le repère lié au satellite, on a la même équation, mais par un raisonnement différent : Le satellite est repos par rapport à lui-même, mais il est soumis à 2 forces : la force de gravitation $\frac{GMm}{r^2}$ et la force d'inertie centrifuge $= -m \frac{v^2}{r}$ due à son mouvement de rotation : $\frac{GMm}{r^2} - m \frac{v^2}{r} = 0$.

4. RÉSOUDRE LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + y = 1 \end{cases}$$

4.1. Méthode de combinaison : On multiplie chaque équation (les 2 membres) par un nombre choisi tel que lorsque l'on additionne les 2 équations, une inconnue "disparaisse".

Éliminons ainsi y : multiplions la première équation par 2 et la seconde par 1 (inchangée) :

$$\left[\begin{array}{rcl} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} & = & 0 \\ \frac{x}{2} + y & = & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ \frac{x}{2} + y & = & 1 \\ x \left(1 + \frac{1}{2}\right) & = & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Éliminons ainsi x : multiplions la première équation par 1 (inchangée) et la seconde par -1 :

$$\left[\begin{array}{rcl} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} & = & 0 \\ \frac{x}{2} + y & = & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \times 1 \\ \times -1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{rcl} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} & = & 0 \\ -\frac{x}{2} - y & = & -1 \\ y \left(-\frac{1}{2} - 1\right) & = & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{-3}{2}y = -1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

4.2. Méthode de substitution : A partir d'une équation, on exprime x en fonction de y, puis on remplace x par sa valeur dans la seconde équation. On obtient ainsi une équation en y seul.

D'après la première équation :

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

En remplaçant x dans la seconde équation :

$$\frac{y}{2} + y = 1 \Rightarrow y \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 1 \Rightarrow y \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

Puis nous revenons à x :

$$x = y = \frac{2}{3}$$

5. COURS

5.1. Points alignés. Comment démontrer que 3 points A, B et C sont alignés en utilisant les vecteurs ?

les 3 points A, B, C sont alignés si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

5.2. Identités remarquables. Rappeler les 3 identités remarquables :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

6. CHIMIE

6.1. Une liaison ionique. Entre 2 atomes (par exemple : Le Sodium Na et le Chlore Cl), une liaison ionique apparaît quand un atome **prend** des électrons à l'autre afin de compléter sa couche externe. Ici, Cl , à qui il manque 1 électron pour compléter sa couche externe, prend un électron à Na et devient Cl^- . Na perd facilement son électron externe car il est seul sur sa dernière couche et devient Na^+ .

Les ions Na^+ et Cl^- sont attirés par la force électrostatique entre une charge positive et une charge négative. Cette liaison ionique est beaucoup moins forte que la liaison covalente.

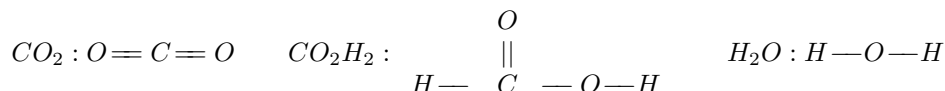
Quand on dissout des grains de Chlorure de Sodium (Na^+Cl^-) dans de l'eau, ils se séparent en (Na^+) et (Cl^-) qui peuvent se déplacer dans l'eau, permettant le passage du courant électrique.

Conclusion : les liaisons ioniques se font avec un des deux atomes dans les colonnes de gauche du tableau périodique qui ont peu d'électrons sur leur couche périphérique et l'autre atome dans les colonnes de droite.

6.2. Une liaison covalente. C'est quand 2 atomes mettent en commun des électrons. Par exemple 2 atomes d'Hydrogène H forment une molécule H_2 en mettant en commun leur seul électron périphérique : $H-H$. Ils ont ainsi leur couche extérieure pleine avec 2 électrons. Mais comme ils ont les mêmes électrons, ils sont attachés par leurs électrons (comme des frères siamois).

2 atomes d'Oxygène O mettent chacun en commun 2 de leurs électrons périphériques afin de compléter leur couche externe à 8 électrons. Ils sont donc reliés par leurs 4 électrons communs : $O=O$.

De même le Carbone C , auquel il manque 4 électrons va faire des liaisons covalentes avec les Hydrogènes H ou les Oxygènes O :



Conclusion : les liaisons covalentes se font entre deux atomes de droite du tableau périodique qui ont leurs couches périphériques presque complètes.