1. Pourcentages

Une augmentation de 10% équivaut à une multiplication par 1,10 :
$200 \rightarrow 200 \times 1,10 = 220$
La seconde augmentation de 10% donne $220 \times 1,10 = 242$
(Une augmentation avec pourcentage est une multiplication déguisée)

Réduction de 10% : $200 \times 0,90 = 180$
augmentation à partir de 180 : $180 \times 1,10 = 198$

Pour compenser une augmentation de 20% ($\times 1,20$), il faut diviser par 1,20 (1/1,20 = 0,8333) soit une réduction de 16,67%

Deux augmentations successives de 10% $= 1,10 \times 1,10 = 1,21$ équivalent à une augmentation de 21%

2. règles de 3 (proportions)

$3kg \rightarrow 2,50E$
$5kg \rightarrow x$
produits en croix : $3 \times x = 5 \times 2,50 => x = 5 \times 2,50/3 = 4,17E$

3. puissances de 10

$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$; $10^2 = 10 \times 10 = 100$; $10^1 = 10$
$10^0 = 1$ En effet : $10^2 = 10^{2+0} \Rightarrow 10^2 = 10^2 \times 10^0 \Rightarrow 10^0 = 1$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1 \quad ; \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01 \quad ; \quad 10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

En effet :

$$1 = 10^0 = 10^{2-2} = 10^2 \times 10^{-2} => 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

4. Opérations sur les puissances

$2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 = 2000 + 300 = 2300$ (Pas de simplification possible)
$2 \times 10^3 \times 3 \times 10^2 = 2 \times 3 \times 10^{3+2} = 6 \times 10^5$
$(2 \times 10^3)^2 = (2 \times 10^3) \times (2 \times 10^3) = 2^2 \times 10^{3\times 2} = 4 \times 10^6$

5. allure des courbes

...

Points de la courbe C1 ($y = 2x + 3$) :
$A = (0, 2 \times 0 + 3 = 3) B = (1, 2 \times 1 + 3 = 5) C(-2, 2 \times (-2) + 3 = -1)$
$D(1/3, 2 \times 1/3 + 3 = (2 + 9)/3 = 11/3)$

Points de la courbe C3 ($y = \sqrt{x}$) :
$A(0, \sqrt{0} = 0) B(1, \sqrt{1} = 1), C(-2, \sqrt{-2}$ n'existe pas$), D(1/3, \sqrt{1/3} = 1/\sqrt{3})$

6. Développements

$(2x + 3) \times (4x - 2) = 8x^2 + 12x - 4x - 6 = 8x^2 + 8x - 6$
$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$
$(-2x + 3)^2 = (-2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$

7. Factoriser

$(x-1)^2-9=(x-1)^2-3^2$ =(différence de 2 carrés)
$=(x-1-3)(x-1+3)=(x-4)(x+2)$
racines $x-4=0$ et $x+2=0$ soient 2 racines : $+4$ et -2
(ou bien développer puis résoudre l'équation du seond degré)
$(x-1)^2+9=$ (ce n'est pas une identité remarquable) $=x^2-2x+10$
avec $\Delta=2^2-4\times 10=-6$: il n'y a pas de racines : on ne peut pas factoriser.
$2x^2+3x=x(2x+3)$ racines : $x=0$ et $2x+3=0$ soient 0 et $-3/2$

8. Opérations sur les fractions

addition : réduire au même dénominateur :

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{3}=\frac{3\times 3}{5\times 3}+\frac{4\times 5}{3\times 5}=\frac{9+20}{15}=\frac{29}{15}$$

pas de simplification possible $15=3\times 5$ mais 29 n'est pas divisible par 3 ni par 5
produit (en simplifiant par 3) :

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{3\times 4}{5\times 3}=\frac{4}{5}$$

puissance :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$$

9. Changement de variable

$F(x)=f(u(x))=2(3x+2)+3=6x+7$
$F(x)=f(u(x))=2(3x+2)^2=2(9x^2+12x+4)=18x^2+24x+8$

10. Dérivées des fonctions

$f(x)=3x+5\rightarrow f'(x)=3$ (dérivée de $3x=3$, dérivée de $5=0$)
$f(x)=2x^2\rightarrow f'(x)=4x$ (dérivée de $x^n=nx^{n-1}$; ici n=2)
$f(x)=3/x\rightarrow f'(x)=-3/x^2$ ($1/x=x^{-1}\Rightarrow(1/x)'=-1\times x^{-2}$)
$f(x)=\sqrt{x}\rightarrow f'(x)=1/(2\sqrt{x})$ ($\sqrt{x}=x^{1/2}\Rightarrow(\sqrt{x})'=(1/2)\times x^{-1/2}$)
$f(x)=x^3\rightarrow f'(x)=3x^2$ (dérivée de $x^n=nx^{n-1}$; ici n=3)

$f(x)=(3x+5)^2\rightarrow f'(x)=2\times 3(3x+5)=18x+30$
(on pose $u=3x+5$ puis on applique : $(u^n)'=nu^{n-1}u'$ avec n=2)
$f(x)=(3+x)/(2x-3)\rightarrow f'(x)=-9/(2x-3)^2$
(on pose $u=3+x$ et $v=2x-3$, puis on applique : $(u/v)'=(u'v-uv')/v^2$)
$f(x)=\sqrt{2x-1}\rightarrow f'(x)=1/\sqrt{2x-1}$
(on pose $u=2x-1$, puis on applique $(\sqrt{u})'=u'/(2\sqrt{u})$

11. Suites

$u_n = n^2 + 2n + 4 \Rightarrow u_3 = 3^2 + 2 \times 3 + 4 = 9 + 6 + 4 = 19;$
$u_5 = 5^2 + 2 \times 5 + 4 = 25 + 10 + 4 = 39$

$u_0 = 0; u_{n+1} = 3u_n + 2 \Rightarrow u_1 = 3u_0 + 2 = 3 \times 0 + 2 = 2;$
$u_2 = 3u_1 + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8; u_3 = 3u_2 + 2 = 3 \times 8 + 2 = 26;$
$u_4 = 3u_3 + 2 = 3 \times 26 + 2 = 80; u_5 = 3u_4 + 2 = 3 \times 80 + 2 = 242$

$u_0 = -1; u_{n+1} = u_n + 2 \Rightarrow u_1 = u_0 + 2 = -1 + 2 = 1;$
$u_2 = u_1 + 2 = 1 + 2 = 3; u_3 = u_2 + 2 = 3 + 2 = 5;$
C'est une suite arithmétique de raison 2 :
$u_1 = u_0 + 2; u_2 = u_1 + 2 = u_0 + 2 + 2 = u_0 + 2 \times 2;$
$u_3 = u_2 + 2 = u_0 + 2 \times 2 + 2 = u_0 + 3 \times 2;$
On peut supposer que $u_n = u_0 + n \times 2$ Démonstration par récurrence :
alors $u_{n+1} = u_n + 2 = u_0 + n \times 2 + 2 = u_0 + (n + 1) \times 2.$
Il ne reste plus qu'à vérifier la relation pour le premier terme :
$u_0 = u_0 + 0 \times 2 = u_0$

$u_0 = 2; u_{n+1} = 3u_n \Rightarrow u_1 = 3u_0 = 3 \times 2 = 6;$
$u_2 = 3u_1 = 3 \times 6 = 18; u_3 = 3u_2 = 3 \times 18 = 54$
C'est une suite géométrique de raison 3 :
$u_1 = 3u_0; u_2 = 3u_1 = 3 \times 3u_0 = 3^2u_0;$
$u_3 = 3u_2 = 3 \times 3^2u_0 = 3^3u_0;$
On peut supposer que $u_n = 3^n u_0$ Démonstration par récurrence :
alors $u_{n+1} = 3u_n = 3 \times 3^n u_0 = 3^{n+1}u_0$. Il ne reste plus qu'à vérifier la relation pour le premier terme :
$u_0 = 3^0 u_0 = 1 \times u_0 = u_0$

12. Equations du premier degré

$3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -5/3$
$3x + 5 = 6x - 3 \Rightarrow 3x - 6x = -3 - 5 \Rightarrow -3x = -8 \Rightarrow x = -8/(-3) = 8/3$

13. Signe des expressions

$3x + 5$ Cette expression est nulle pour $x = -5/3$; elle est positive pour $x = +\infty$ elle est aussi positive pour x = 0 > -5/3 : donc positive à droite de $-5/3$ et négative à gauche.

x	$-\infty$		-5/3		$+\infty$	commentaire
$3x + 5$		$-$	0	$+$		coeff. de $x = 3 > 0$ $\Rightarrow$ signe + à droite

$(x - 1) \times (2 - x)$ Cette expression est nulle pour $x = 1$ et $x = 2$;

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$	commentaire
$x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$		coeff. de $x = 1 > 0$
$2 - x$		$+$	|	$+$	0	$-$		coeff. de $x = -1 < 0$
$(x - 1) \times (2 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		coeff. de $x^2 = -1 < 0$: $\Rightarrow$ signe $-$ en dehors des racines

$(3x - 2)/(3 - 2x)$ a le même signe que $(3x - 2) \times (3 - 2x)$. Il y a simplement une valeur interdite en plus ($x \neq 3/2$) :

x	$-\infty$ $\quad$ $2/3$ $\quad$ $3/2$ $\quad$ $+\infty$	commentaire
$3x-2$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad \vert \quad$ $+$	coeff. de $x = 3 > 0$
$3-2x$	$+$ $\quad \vert \quad$ $+$ $\quad 0 \quad$ $-$	coeff. de $x = -2 < 0$
$(3x-2)/(3-2x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad \Vert \quad$ $-$	$(-) \times (+) = (-)$

14. Système d'équations

Méthode de combinaison :

équations	élimination de y	élimination de x
$3x+5y=21$	$\times 3$	$\times 2$
$2x-3y=-5$	$\times 5$	$\times -3$
	$9x+15y=63$	$6x+10y=42$
	$10x-15y=-25$	$-6x+9y=15$
	$19x=38$	19y = 57
	$x=2$	y = 3

15. Statistiques

$\text{Moyenne}(10, 7, 15, 6, 9) = (10+7+15+6+9)/5 = 47/9$

Nombre d'élèves = 1 + 2 + 4 + 3 + 5 + 7 + 4 + 2 = 28
Moyenne $= (1 \times 4 + 2 \times 6 + 4 \times 8 + 3 \times 9 + 5 \times 10 + 7 \times 11 + 4 \times 12 + 2 \times 14)/28 = 278/28 \sim 9,93$
Premier quartile = le premier quart des élèves : 7 élèves => note 8,5

Proba. de tirer une copie avec une note de 10 :
P(10) = Nombre de cas favorables / Nombre de cas total = 5 / 28 ≈ 0,18 = 18%
Proba. de tirer une copie avec une note < 10 :
P(<10) = (1+2+4+3)/28 = 10/28 ≈ 0.36 = 36%
Proba. de tirer un Roi Rouge dans un jeu de 32 cartes ?
Il y a un Roi de Coeur et un Roi de Carreau, soit 2 Rois Rouges
P(RR) = Nombre de cas favorables / Nombre de cas total = 2/32 = 1/16 = 0.0625 = 6,25%